

TEMA 5:

NÚMEROS RACIONALES

ÍNDICE:

- 1 – INTRODUCCIÓN
- 2 – EL CONJUNTO DE LOS NÚMEROS RACIONALES
- 3 – REPRESENTACIÓN GEOMÉTRICA DE LOS NÚMEROS RACIONALES
- 4 – SUMA DE NÚMEROS RACIONALES
- 5 – MULTIPLICACIÓN DE NÚMEROS RACIONALES
- 6 – EL CUERPO DE LOS NÚMEROS RACIONALES
- 7 – RELACIÓN DE ORDEN EN Q
- 8 – VALOR ABSOLUTO DE UN NÚMERO RACIONAL
- 9 – Q COMO AMPLIACIÓN DE Z
- 10 – EXPRESIÓN DECIMAL DE LOS NÚMEROS RACIONALES
- 11 – CONCLUSIÓN
- 12- BIBLIOGRAFÍA

1 – INTRODUCCIÓN

Nos encontramos ante un tema de gran importancia, ya que como nos marca la LOE y su desarrollo en el decreto 133/07 (para Galicia), los contenidos que enseñemos a nuestros alumnos deben procurar ser significativos para estos, y en este tema encontrarán de manera muy clara la funcionalidad para su vida diaria (algo así, que puedas meter algo de leyes)

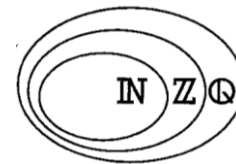
El uso de las fracciones o números racionales tuvo lugar mucho antes que el de los enteros negativos, ya que eran necesarias para resolver y expresar multitud de situaciones de la **vida cotidiana del hombre primitivo** (por ejemplo, a la hora de repartir la caza del día entre los miembros de la tribu).

Así, las fracciones aparecen en los textos matemáticos más antiguos, como ocurre en el famoso **papiro de Rhind** (escrito en Egipto hacia el año 1550 aC); donde se hacen múltiples referencias a las fracciones y a las operaciones con las mismas.

De todos modos, la forma actual de escribir las fracciones ($2/3$, $5/7$, $4/10$,.....) y de hacer aritmética con ellas data de los siglos XV y XVI.

Desde el punto de vista estrictamente matemático se suele decir que los números racionales surgen ante las limitaciones de los números enteros a la hora de resolver ecuaciones del tipo $\mathbf{a \cdot x = b}$, $\forall a, b \in \mathbf{Z}$.

Como vemos, para encontrar solución a esta ecuación en todos los casos debemos ampliar el conjunto de los números enteros; dando lugar así al conjunto de los números racionales.



2 – EL CONJUNTO DE LOS NÚMEROS RACIONALES

Para la construcción formal del conjunto de los números racionales se suele considerar el conjunto de pares ordenados $\mathbf{Z \times Z^* = \{(a,b) / a \in \mathbf{Z}, b \in \mathbf{Z^*}\}}$ (con $\mathbf{Z^* = Z - \{0\}}$).

Cada uno de estos pares (a,b) se denomina fracción y se escribe normalmente como $\frac{a}{b}$; siendo a el **numerador** y b el **denominador**.

Dentro del conjunto $\mathbf{Z \times Z^*}$ se define la siguiente relación de equivalencia

$$\frac{a}{b} \sim \frac{c}{d} \Leftrightarrow a \cdot d = b \cdot c$$

y esta es, en efecto, una relación de equivalencia; ya que es reflexiva, simétrica y transitiva.

La relación de equivalencia \sim divide al conjunto $\mathbf{Z \times Z^*}$ en clases de equivalencia; y **cada una de estas clases de equivalencia constituye un número racional**. Es decir, la clase de equivalencia $\left\{ \frac{a}{b} \right\}$ constituye un número racional, siendo $\frac{a}{b}$ un representante de dicha clase.

A su vez, el **conjunto cociente** $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^* / \sim$ formado por todas las clases de equivalencia se conoce como conjunto de los números racionales y se denota por \mathbb{Q} .

De la definición de número racional se extraen algunas propiedades importantes que se enumeran a continuación:

- Sea h un entero $\neq 0$, $\Rightarrow \frac{a}{b} \sim \frac{a \cdot h}{b \cdot h}$, y a partir de esta propiedad se extraen dos consecuencias fundamentales para el trabajo con fracciones:

a) Dados dos n^{os} racionales cualesquiera, siempre es posible hallar dos representantes de los mismos que tengan el mismo denominador (**reducir a común denominador**).

Sean $\frac{a}{b}, \frac{c}{d} \in \mathbb{Q}$ tal que $m.c.m(b,d) = m \Rightarrow \begin{cases} m = b \cdot b' \\ m = d \cdot d' \end{cases}$ de forma que:

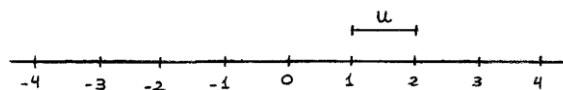
$$\frac{a}{b} \sim \frac{a \cdot b'}{b \cdot b'} = \frac{a'}{m} \quad \text{y} \quad \frac{c}{d} \sim \frac{c \cdot d'}{d \cdot d'} = \frac{c'}{m}$$

b) Todo n^{o} racional tiene un representante $\frac{a}{b}$ tal que a y b son primos entre sí; y a este representante se le llama **fracción irreducible**. En la práctica se adopta como representante canónico de un n^{o} racional a la fracción irreducible de denominador positivo.

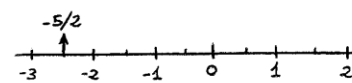
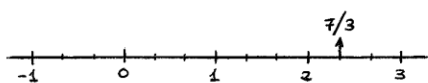
- Las fracciones del tipo $0/b$ constituyen una clase, es decir, un número racional. Dicha clase recibe el nombre de n^{o} racional cero y se representa por 0.
- Las fracciones del tipo b/b constituyen una clase, es decir, un número racional. Dicha clase recibe el nombre de n^{o} racional uno y se representa por 1.

3 – REPRESENTACIÓN GEOMÉTRICA DE LOS NÚMEROS RACIONALES

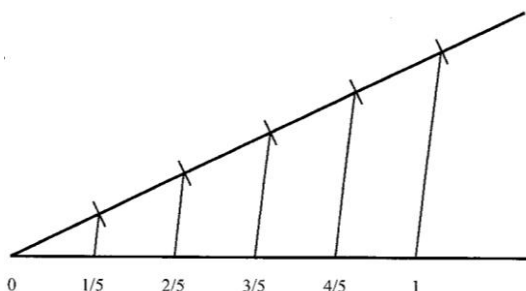
Sobre una recta tomamos un punto origen O como representante de la clase $\{0\}$. Elegimos un segmento como unidad de longitud y lo llevamos sucesivamente a la derecha y a la izquierda de O , dando lugar a las marcas de los números enteros positivos y negativos respectivamente.



Para representar la fracción m/n dividiremos los segmentos de longitud unidad en n partes iguales (creándose así segmentos “secundarios” de longitud $1/n$). Luego tomaremos m de esos segmentos “secundarios” a la derecha o a la izquierda de O (dependiendo de si m es un entero positivo o negativo) y ya tendremos así localizado el número racional m/n . Por ejemplo:



A la hora de dividir un segmento en n partes iguales, el teorema de Tales nos proporciona un método geométrico rápido y sencillo mediante el simple trazado de rectas paralelas. Por ejemplo:



4 – SUMA DE NÚMEROS RACIONALES

La suma o adición de números racionales viene dada por la aplicación

$$Q \times Q \xrightarrow{+} Q$$

$$(\alpha, \beta) \rightarrow \alpha + \beta = \left\{ \frac{a}{b} \right\} + \left\{ \frac{a'}{b'} \right\} = \left\{ \frac{a \cdot b' + a' \cdot b}{b \cdot b'} \right\}$$

la cual presenta las siguientes propiedades:

- **Uniforme**, ya que la suma $\alpha + \beta$ es independiente de los representantes elegidos. Esta propiedad nos permite operar siempre con representantes de igual denominador, en cuyo caso la suma de números racionales se reduce a:

$$\alpha + \beta = \left\{ \frac{a}{d} \right\} + \left\{ \frac{b}{d} \right\} = \left\{ \frac{a+b}{d} \right\}$$

- **Interna**, ya que por la propia definición de la suma $\forall \alpha, \beta \in Q \Rightarrow (\alpha + \beta) \in Q$.
- **Conmutativa**, ya que $\alpha + \beta = \beta + \alpha$.
- **Asociativa**, ya que $\alpha + (\beta + \gamma) = (\alpha + \beta) + \gamma$.
- **Elemento neutro**, ya que $\alpha + 0 = \alpha = 0 + \alpha$, siendo $0 = \{0/d\}$.
- **Elemento simétrico**, pues $\alpha + (-\alpha) = 0 = (-\alpha) + \alpha$ (con $\alpha = \left\{ \frac{a}{d} \right\}$ y $(-\alpha) = \left\{ -\frac{a}{d} \right\}$).

[a partir de aquí se puede definir la resta de números racionales como $\alpha - \beta = \alpha + (-\beta)$]

Y por cumplirse todas estas propiedades decimos que la estructura algebraica $(Q, +)$ es un **grupo aditivo abeliano**.

5 – MULTIPLICACIÓN DE NÚMEROS RACIONALES

La multiplicación o producto de números racionales viene dada por la aplicación

$$\begin{array}{l} Q \times Q \xrightarrow{\cdot} Q \\ (\alpha, \beta) \rightarrow \alpha \cdot \beta = \left\{ \frac{a}{b} \right\} \cdot \left\{ \frac{a'}{b'} \right\} = \left\{ \frac{a \cdot a'}{b \cdot b'} \right\} \end{array}$$

la cual presenta las siguientes propiedades:

- **Uniforme**, pues el producto $\alpha \cdot \beta$ es independiente de los representantes elegidos.
- **Interna**, ya que por la propia definición del producto $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{Q} \Rightarrow \alpha \cdot \beta \in \mathbb{Q}$.
- **Conmutativa**, ya que $\alpha \cdot \beta = \beta \cdot \alpha$.
- **Asociativa**, ya que $\alpha \cdot (\beta \cdot \gamma) = (\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma$.
- **Elemento neutro**, ya que $\alpha \cdot 1 = \alpha = 1 \cdot \alpha$, siendo $1 = \{d/d\}$.
- **Elemento simétrico**, ya que $\alpha \cdot \alpha^{-1} = 1 = \alpha^{-1} \cdot \alpha$ (siendo $\alpha = \left\{ \frac{a}{d} \right\}$ y $\alpha^{-1} = \left\{ \frac{d}{a} \right\}$).

(Es decir, todo número racional $\alpha = \{a/d\}$ tiene simétrico siempre que $a \neq 0$)

Y por cumplirse todas estas propiedades decimos que la estructura algebraica (\mathbb{Q}, \cdot) es un **grupo multiplicativo abeliano**.

6 – EL CUERPO DE LOS NÚMEROS RACIONALES

Si relacionamos la suma y la multiplicación de números racionales vemos que se verifica (al igual que ocurría en el conjunto de los números enteros) la propiedad **distributiva** del producto respecto a la suma: $\alpha \cdot (\beta + \gamma) = \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma$.

En virtud de esta propiedad y de todas las que vimos en los dos apartados anteriores, podemos afirmar que la estructura algebraica $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ es un **cuerpo conmutativo**.

7 – RELACIÓN DE ORDEN EN Q

Dados dos números racionales α y β , diremos que α es menor que β ($\alpha < \beta$) si $(\beta - \alpha) > 0$. En este caso también se podría decir que β es mayor que α ($\beta > \alpha$).

Por otra parte, diremos que α es menor o igual que β ($\alpha \leq \beta$) si $(\beta - \alpha) \geq 0$; y esta relación \leq es una relación de orden por cumplir las propiedades **Reflexiva** ($\alpha \leq \alpha$), **Antisimétrica** (si $\alpha \leq \beta$ y $\beta \leq \alpha \Rightarrow \alpha = \beta$) y **Transitiva** (si $\alpha \leq \beta$ y $\beta \leq \gamma \Rightarrow \alpha \leq \gamma$).

Se dice también que la relación \leq es una relación de **orden total**, ya que todos los números racionales son comparables entre sí por dicha relación ($\alpha \leq \beta$ o $\beta \leq \alpha$). Como consecuencia de ello diremos que \mathbb{Q} es un conjunto totalmente ordenado.

A continuación se citan otras importantes propiedades de la relación de orden en el conjunto de los números racionales:

a) La relación de orden \leq es compatible con la suma.

Si $\alpha \leq \beta$, se cumple que $\alpha + \gamma \leq \beta + \gamma$ (para cualquier $\gamma \in \mathbb{Q}$)

b) La relación de orden \leq no es siempre compatible con el producto (sólo se conserva si se multiplica por un número positivo).

Si $\alpha \leq \beta$, se cumple que $\alpha \cdot \gamma \leq \beta \cdot \gamma$ si $\gamma \in \mathbb{Q}^+$ o $\alpha \cdot \gamma \geq \beta \cdot \gamma$ si $\gamma \in \mathbb{Q}^-$

c) En \mathbb{Q} se verifica la propiedad arquimediana.

Si $0 < \alpha < \beta \Rightarrow \exists n \in \mathbb{N}$ tal que $\alpha \cdot n > \beta$

d) Entre dos n^{os} racionales existen infinitos n^{os} racionales (orden denso).

Si α y β son dos números racionales tales que $\alpha < \beta$, entonces siempre existirá

otro número racional γ tal que $\alpha < \gamma < \beta$. Por ejemplo, si $\alpha = \left\{ \frac{a}{d} \right\}$ y $\beta = \left\{ \frac{b}{d} \right\}$,

el número racional $\gamma = \left\{ \frac{a+b}{2 \cdot d} \right\}$ siempre cumpliría la condición anterior.

Esta propiedad de la densidad del orden en \mathbb{Q} (que no existe ni en \mathbb{N} ni en \mathbb{Z}) hace que resulte imposible hablar del n^{o} racional anterior o posterior a uno dado.

8 – VALOR ABSOLUTO DE UN NÚMERO RACIONAL

Se dice que un n^{o} racional $\alpha = \{a/b\}$ es positivo [$\alpha > 0$ o $\alpha \in \mathbb{Q}^+$] cuando $a \cdot b > 0$; y diremos que es negativo [$\alpha < 0$ o $\alpha \in \mathbb{Q}^-$] cuando $a \cdot b < 0$.

Llamaremos valor absoluto de un número racional α al racional no negativo dado por $|\alpha| = \sup(\alpha, -\alpha)$. Y de esta definición se deducen las siguientes propiedades:

- | | |
|---|--|
| a) $ \alpha = \alpha$ si $\alpha > 0$ | e) $ \alpha = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0$ |
| b) $ \alpha = -\alpha$ si $\alpha < 0$ | f) $ \alpha + \beta \leq \alpha + \beta $ (desigualdad triangular) |
| c) $ - \alpha = \alpha $ | g) $ \alpha \cdot \beta = \alpha \cdot \beta $ |
| d) $ \alpha \geq 0$ | |

9 – \mathbb{Q} COMO AMPLIACIÓN DE \mathbb{Z}

A simple vista resulta evidente que \mathbb{Q} es una ampliación de \mathbb{Z} , ya que en \mathbb{Q} están incluidos los números del tipo $\alpha = \{a/1\}$ (es decir, está incluido cualquier $a \in \mathbb{Z}$).

Desde un punto de vista formal este hecho se suele justificar a través de la existencia de un isomorfismo entre el conjunto \mathbb{Z} y un subconjunto $\mathbb{Q}^* \subset \mathbb{Q}$ formado por las clases del tipo $\{a/1\}$.

En efecto, la aplicación $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Q}^*$ cumple las siguientes propiedades:

$$\left. \begin{array}{l} f(a+b) = f(a) + f(b) \\ f(a \cdot b) = f(a) \cdot f(b) \\ \text{Si } a < b \Rightarrow f(a) < f(b) \end{array} \right\} \begin{array}{l} a \rightarrow \{a/1\} \\ \text{y esto confirma la existencia del } \mathbf{isomorfismo} \text{ entre } \mathbf{Z} \text{ y } \mathbf{Q}^*. \end{array}$$

10 – EXPRESIÓN DECIMAL DE LOS NÚMEROS RACIONALES

Como sabemos, todo nº racional α se puede expresar en forma de fracción $\{a/b\}$ o a través de su expresión decimal equivalente (obtenida al hacer la división euclídea de a entre b).

A continuación vamos a repasar los distintos tipos de expresiones decimales que nos podemos encontrar:

- **Número entero**

Se obtiene este tipo de expresión cuando a es múltiplo de b. Por ejemplo: $6/2 = 3$.

- **Decimal exacto**

Se obtiene este tipo de expresión cuando en la descomposición factorial de b sólo aparecen el 2 y/o el 5 como factores primos (suponemos que a/b ya es irreducible). Por ejemplo: $7/10 = 0,7$.

- **Decimal periódico puro**

Se obtiene este tipo de expresión cuando en la descomposición factorial de b no aparecen ni el 2 ni el 5 como factores primos (como antes, a/b ya es irreducible).

Por ejemplo: $8/3 = 2,33333\dots = 2\overline{3}$

- **Decimal periódico mixto**

Se obtiene este tipo de expresión cuando en la descomposición factorial de b aparecen, además del 2 y/o el 5, otros factores distintos (otra vez, a/b ya es irreducible).

Por ejemplo: $13/6 = 2,16666\dots = 2\overline{16}$

Como es lógico, también es posible realizar el proceso inverso; es decir, a partir de una expresión decimal obtener la **fracción generatriz** correspondiente.

Por ejemplo:

$$\text{a) } 2,5 = \frac{25}{10} = \frac{5}{2}$$

$$\text{b) } 2\overline{3} = \frac{23-2}{9} = \frac{21}{9} = \frac{7}{3}$$

$$\text{c) } 1\overline{23} = \frac{123-12}{90} = \frac{111}{90} = \frac{37}{30}$$

11 – CONCLUSIÓN

Evidentemente, el manejo de los números racionales juega un papel fundamental dentro del currículo de la enseñanza secundaria; aunque su tratamiento, como es lógico, estará **exento de los formalismos** empleados a lo largo del tema.

De hecho, el estudio de los números racionales en secundaria se centra en la realización de operaciones con ellos y en sus aplicaciones a la hora de resolver problemas reales de la vida cotidiana (tratando siempre de hacer énfasis en el carácter práctico y funcional de las Matemáticas, con el fin de contribuir de forma eficaz a la adquisición de las **Competencias Básicas** establecidas en la LOE y desarrolladas en el decreto 133/07 del currículo para la Comunidad autónoma de Galicia).

12- BIBLIOGRAFÍA